TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM $\beta-$NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI VỚI BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN

PHAN TRỌNG TIẾN
Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Quảng Bình
E-mail: trongtien2000@gmail.com; tienpt@qbu.edu.vn

Tóm tắt: Bài viết đưa ra một số số kết quả về dưới vi phân $\beta-$nhớt và tính duy nhất nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi với giá trị biên.
Từ khóa: borno β, $\beta-$trơn, nghiệm dưới $\beta-$nhớt, nghiệm trên $\beta-$nhớt, phương trình Hamilton-Jacobi.

1 GIỚI THIỆU

Lý thuyết nghiệm nhớt của phương trình đạo hàm riêng đã xuất hiện từ đầu những năm 80 của thế kỷ trước, nó được đề xuất bởi Crandall M. G và Lions P. L. trong bài báo [7]. Cho đến nay đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về nghiệm nhớt và ứng dụng của chúng như: [1], [7] về phương trình đạo hàm riêng trong không gian hữu hạn chiều; [2], [3], [4], [5], [6], [8], [9], [10] về phương trình đạo hàm riêng trong không gian vô hạn chiều...

Ban đầu, khi nghiên cứu nghiệm nhớt của phương trình đạo hàm riêng người ta dùng dưới vi phân Fréchet. Trong công trình nghiên cứu của mình, Borwein và Preiss (xem [4]) đã đưa ra khái niệm $\beta-$dưới vi phân. Trong đó β là một lớp các tập con của không gian X mà trong các trường hợp đặc biệt của β thì ta nhận được các dưới vi phân quen thuộc như dưới vi phân Fréchet, Hadamard, Hadamard yếu, Gâteaux.

Bài viết này nghiên cứu tính duy nhất của nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi dạng $u + H(x, Du) = 0$. Cụ thể là tính duy nhất nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình cho lớp hàm liên tục đều và bị chặn, với miền xác định là tập mở $\Omega \subset X$. Kết quả chính của chúng tôi trong bài báo này được thể hiện trong các Định lí 2.5, Định lí 2.6, Định lí 2.8, Hệ quả 2.9. Đây là sự mở rộng cho kết quả được nêu

Tạp chí Khoa học và Giáo dục, Trường Đại học Sư phạm Huế
ISSN 1859-1612, Số 01(45)/2018: tr. 45-56
Ngày nhận bài: 30/3/2017; Hoàn thành phản biện: 28/6/2017; Ngày nhận đăng: 28/7/2017

trong [5], ở đó các tác giả đã chứng minh được tính duy nhất nghiệm của phương trình $u + H(x, Du) = 0$ trên không gian hữu hạn chiều.

Ngoài phần giới thiệu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của bài viết bao gồm hai phần với hai nội dung trọng tâm là: trình bày dưới vi phân $\beta-$nhớt và các kết quả về quy tắc tổng mờ của dưới vi phân; trình bày nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi và kết quả về tính duy nhất của nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi với giá trị biên.

2 NỘI DUNG

2.1 Dưới vi phân $\beta-$nhớt

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng các kí hiệu thông dụng sau đây: Cho X là không gian Banach với chuẩn được kí hiệu $\|.\|$, X^* là không gian đối ngẫu của X. Không gian tích $X^N = \underbrace{X \times X \times ... \times X}_{N-\text{lần}}$. Với tập $S \subset X$ ta ký hiệu đường kính của nó bởi $\text{diam}(S) := \sup\{\|x - y\| : x, y \in S\}$. Với $u \in X, p \in X^*$ thì $\langle p, u\rangle$ để chỉ giá trị của p tại u. $\partial\Omega$ để chỉ tập các điểm biên của tập $\Omega \subset X$.

Trong [5] các tác giả đã đưa ra khái niệm borno β, trong đó β là một họ các tập con của X thỏa mãn một số điều kiện xác định. Trong một số trường hợp đặc biệt của β thì thu được các tô pô thường gặp, những kết quả đó được nhắc lại trong Định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 2.1. Một *borno* β trên X là một họ không rỗng các tập con đóng, bị chặn và đối xứng tâm của X (tức là với mọi $x \in X$ thì $-x \in X$) thỏa mãn ba điều kiện sau:

1) $X = \bigcup\limits_{B\in\beta} B$,

2) họ β đóng kín đối với phép nhân với một vô hướng,

3) hợp của hai phần tử bất kỳ trong β đều chứa trong một phần tử của β.

Nhận xét 2.2. Một số trường hợp đặc biệt:

1) họ F tất cả các tập con đóng, bị chặn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Fréchet;*

2) họ H tất cả các tập con compact, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Hadamard*;

3) họ WH tất cả các tập con compact yếu, đóng, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Hadamard yếu*;

4) họ G tất cả các tập con hữu hạn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Gâteaux*.

Định nghĩa 2.3. Giả sử $f_m, f \in X^*, m \in \mathbb{N}$. Ta nói f_m hội tụ về f đối với borno β nếu $f_m \to f$ khi $m \to \infty$ đều trên mọi phần tử của β, có nghĩa là với mọi tập $M \in \beta$ và mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m \geq n_0$, mọi $x \in M$ ta đều có $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Cho một borno β trên X ký hiệu τ_β là tôpô trên X^* với sự hội tụ đều trên β tập hợp và X^*_β là không gian véc tơ tôpô (X^*, τ_β).

Ta luôn giả thiết rằng với mỗi hàm số được xét đến đều nhận giá trị trong tập số thực mở rộng và quy ước là nửa liên tục dưới (trên) thì không đồng nhất bằng $+\infty(-\infty)$ và không nhận giá trị bằng $-\infty(+\infty)$. Cho hàm f xác định trên X, ta nói rằng f là $\beta-$khả vi tại x và có $\beta-$đạo hàm $\nabla_\beta f(x) \in X^*_\beta$ nếu $f(x)$ hữu hạn và

$$\frac{f(x+tu) - f(x) - t\langle \nabla_\beta f(x), u\rangle}{t} \to 0$$

khi $t \to 0$ đều trên $u \in V$ với bất kỳ $V \in \beta$. Tức là, với mọi $\varepsilon > 0$, với mọi $V \in \beta$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, với mọi $u \in V$ thì

$$\left|\frac{f(x+tu) - f(x) - t\langle \nabla_\beta f(x), u\rangle}{t}\right| < \varepsilon.$$

Ta nói rằng hàm f là $\beta-$trơn tại x nếu $\nabla_\beta f : X \to X^*_\beta$ là liên tục trong lân cận của x.

Nếu không gian X có hàm chuẩn là hàm $\beta-$trơn trên mặt cầu đơn vị thì khi đó ta nói X có chuẩn $\beta-$trơn.

Nếu không gian X không có chuẩn $\beta-$trơn nhưng có chuẩn tương đương với chuẩn $\beta-$trơn thì ta tính theo chuẩn tương đương này.

Định nghĩa 2.4 (Definition 2.1, [5])**.** Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục dưới và $f(x) < +\infty$. Ta nói rằng f là *khả dưới vi phân $\beta-$nhớt* và x^* là một *dưới đạo hàm $\beta-$nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g : X \to \mathbb{R}$ sao cho g là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Ta ký hiệu tập tất cả các dưới đạo hàm $\beta-$nhớt của f tại x là $D_\beta^- f(x)$ và gọi là *dưới vi phân $\beta-$nhớt* của f tại x.

Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục trên và $f(x) > -\infty$. Ta nói rằng f là *khả trên vi phân $\beta-$nhớt* và x^* là một *trên đạo hàm $\beta-$nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g : X \to \mathbb{R}$ sao cho g là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực đại địa phương tại x. Ta ký hiệu tập tất cả các trên đạo hàm $\beta-$nhớt của f tại x là $D_\beta^+ f(x)$ và gọi là *trên vi phân $\beta-$nhớt* của f tại x.

Định lí dưới đây cho chúng ta thông tin về sự liên hệ giữa các dưới đạo hàm $\beta-$nhớt của hàm bị chặn, nửa liên tục dưới. Kết quả này được sử dụng trong việc chứng minh tính duy nhất nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi. Định lý này lấy kỹ thuật chứng minh ở [Theorem 2.9, [5]] và ý tưởng ở [Lemma III.6, [4]]. Trong [5] thì họ hàm $(f_1, ..., f_N)$ thỏa tính chất nửa liên tục dưới địa phương đều còn trong Định lí này các hàm $f_1, ..., f_N$ bị chặn.

Định lí 2.5. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với chuẩn $\beta-$trơn và $f_1, ..., f_N : X \to \mathbb{R}$ là N hàm nửa liên tục dưới, bị chặn dưới.*
Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_n \in X, n = 1, ..., N$ và $x_n^* \in D_\beta^- f_n(x_n)$ thỏa mãn

i)

$$\operatorname{diam}(x_1, ..., x_N).\max(1, \|x_1^*\|, ..., \|x_N^*\|) < \varepsilon, \tag{1}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) < \inf_{x\in X} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \varepsilon, \tag{2}$$

iii)

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n^* \right\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Chứng minh. Với mỗi số thực $t > 0$, ta xác định hàm $w_t : X^N \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$w_t(x_1, ..., x_N) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) + t \sum_{n,m=1}^{N} \|x_n - x_m\|^2.$$

Đặt $M_t = \inf w_t$, khi đó M_t đơn điệu tăng theo t và bị chặn trên bởi

$$\alpha := \lim_{\eta\to 0} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, ..., x_N) \le \eta \right\}.$$

Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $\eta_0 > 0$ sao cho với mọi $0 < \eta < \eta_0$ thì

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, ..., x_N) \leq \eta\right\} < \alpha + \varepsilon.$$

Chọn $\eta \in (0, \eta_0)$ thỏa mãn $t.N^2.\eta^2 < \varepsilon$. Khi đó, tồn tại $y_1, ..., y_N$ sao cho

$$\operatorname{diam}(y_1, ..., y_N) < \eta$$

và

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(y_n) < \inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, ..., x_N) \leq \eta\right\} + \varepsilon.$$

Theo cách chọn η ở trên ta có $t\sum_{n,m=1}^{N} \|y_n - y_m\|^2 < \varepsilon$ nên

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(y_n)+t\sum_{n,m=1}^{N} \|y_n-y_m\|^2 < \inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, ..., x_N) \leq \eta\right\}+2\varepsilon < \alpha+3\varepsilon.$$

Do đó $M_t < \alpha + 3\varepsilon$, mà $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $M_t \leq \alpha$. Đặt $M = \lim_{t\to+\infty} M_t$. Với mỗi $t > 0$ áp dụng nguyên lí biến phân trơn [4] cho hàm w_t tồn tại một hàm ϕ_t lồi, C^1 và $x_n^t, n = 1, ..., N$ sao cho $w_t + \phi_t$ đạt cực tiểu địa phương tại $(x_1^t, ..., x_N^t)$, $\|\nabla_\beta \phi_t(x_1^t, ..., x_N^t)\| < \varepsilon/N$ và

$$w_t(x_1^t, ..., x_N^t) < \inf w_t + \frac{1}{t} \leq M + \frac{1}{t}. \tag{4}$$

Với mỗi n, hàm

$$y \mapsto w_t(x_1^t, ..., x_{n-1}^t, y, x_{n+1}^t, ..., x_N^t) + \phi_t(x_1^t, ..., x_{n-1}^t, y, x_{n+1}^t, ..., x_N^t)$$

đạt cực tiểu địa phương tại $y = x_n^t$. Như vậy, với $n = 1, ..., N$ thì

$$x_{n_t}^* := -\nabla_{\beta x_n}\phi_t(x_1^t, ..., x_N^t) - 2t\sum_{m=1}^{N} \nabla_\beta \|.\|^2(x_n^t - x_m^t) \in D_\beta^- f_n(x_n^t). \tag{5}$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{N} x_{n_t}^* = -\sum_{n=1}^{N} \nabla_{\beta x_n}\phi_t(x_1^t, ..., x_N^t) - 2t\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \nabla_\beta\|.\|^2(x_n^t - x_m^t).$$

Vì $\| - \sum_{n=1}^{N} \nabla_{\beta x_n}\phi_t(x_1^t, ..., x_N^t)\| < \varepsilon$ và $\nabla_\beta\|.\|^2(x_n^t - x_m^t) + \nabla_\beta\|.\|^2(x_m^t - x_n^t) = 0$ nên

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_{n_t}^*\right\| < \varepsilon.$$

Theo Định nghĩa M_t, kết hợp với (4) ta có

$$\begin{aligned} M_{t/2} &\leq w_{t/2}(x_1^t, ..., x_N^t) \\ &= w_t(x_1^t, ..., x_N^t) - \frac{t}{2} \sum_{n,m=1}^{N} \|x_n^t - x_m^t\|^2 \\ &\leq M_t + \frac{1}{t} - \frac{t}{2} \sum_{n,m=1}^{N} \|x_n^t - x_m^t\|^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$t \sum_{n,m=1}^{N} \|x_n^t - x_m^t\|^2 \leq 2(M_t - M_{t/2} + \frac{1}{t})$$

và từ đó ta có kết luận

$$\lim_{t\to+\infty} t \sum_{n,m=1}^{N} \|x_n^t - x_m^t\|^2 = 0.$$

Suy ra

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{diam}(x_1^t, ..., x_N^t) = 0.$$

Mặt khác ta có đánh giá $\|\nabla_\beta \|.\|^2(x)\| \leq 2\|x\|$ nên từ công thức (5) ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n_t}^*\| &\leq \| - \nabla_{x_n}\phi_t(x_1^t, ..., x_N^t)\| + 2t \left\| \sum_{m=1}^{N} \nabla \|.\|^2(x_n^t - x_m^t) \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{N} + 2t \sum_{m=1}^{N} 2\|x_n^t - x_m^t\| \leq \frac{\varepsilon}{N} + 4tN \operatorname{diam}(x_1^t, ..., x_N^t) \end{aligned}$$

suy ra $\lim\limits_{t\to+\infty} \|x_{n_t}^*\| = 0$ do đó

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{diam}(x_1^t, ..., x_N^t). \max(\|x_{1_t}^*\|, ..., \|x_{N_t}^*\|) = 0.$$

và

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{diam}(x_1^t, ..., x_N^t). \max(1, \|x_{1_t}^*\|, ..., \|x_{N_t}^*\|) = 0.$$

Như vậy, vì α là một chặn trên của M_t nên ta có

$$\begin{aligned} M &\leq \lim_{\eta\to 0} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, ..., x_N) \leq \eta \right\} \\ &\leq \liminf_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n^t) = \liminf_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} w_t(x_1^t, ..., x_N^t) \leq M \end{aligned}$$

nên

$$M = \lim_{\eta\to 0} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \mathrm{diam}(x_1, ..., x_N) \leq \eta \right\}.$$

Với $\eta > 0$ bất kỳ ta có

$$\inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \mathrm{diam}(x_1, ..., x_N) \leq \eta \right\} \leq \inf_{x\in X} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

suy ra

$$M = \lim_{\eta\to 0} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \mathrm{diam}(x_1, ..., x_N) \leq \eta \right\} \leq \inf_{x\in X} \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Theo cách xác định hàm w_t ta có $\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n^t) \leq w_t(x_1^t, ..., x_N^t)$. Từ công thức (4) ta có $\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n^t) < M + \frac{1}{t} \leq \inf_{x\in X} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \frac{1}{t}$.

Lấy $x_n = x_n^t$ và $x_n^* = x_{n_t}^*, n = 1, ..., N$ với t đủ lớn ta có kết luận của Định lí. □

Định lí 2.6. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với chuẩn $\beta-$trơn. $\Omega \subset X$ là tập mở và $f_1, ..., f_N : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ là N hàm nửa liên tục dưới, bị chặn. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_n \in \overline{\Omega}, n = 1, ..., N$ và $x_n^* \in D_\beta^- f_n(x_n)$ thỏa mãn*

i)

$$\mathrm{diam}(x_1, ..., x_N). \max(1, \|x_1^*\|, ..., \|x_N^*\|) < \varepsilon,$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) < \inf_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \varepsilon,$$

iii)

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n^* \right\| < \varepsilon.$$

Chứng minh. Thác triển các hàm $f_n, n = 1..N$ thành các hàm $\widetilde{f_n}$ trên X, với

$$\widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{nếu } x \in \overline{\Omega} \\ \infty & \text{nếu } x \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Khi đó, ta thấy rằng $\widetilde{f_n}, n = 1..N$ là các hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên X. Theo Định lí 2.5, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_n \in X, n = 1, ..., N$ và $x_n^* \in D_\beta^- \widetilde{f_n}(x_n)$ sao cho

i)
$$\operatorname{diam}(x_1, ..., x_N). \max(1, \|x_1^*\|, ..., \|x_N^*\|) < \varepsilon,$$

ii)
$$\sum_{n=1}^{N} \widetilde{f}_n(x_n) < \inf_{x \in X} \sum_{n=1}^{N} \widetilde{f}_n(x) + \varepsilon, \tag{6}$$

iii)
$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n^* \right\| < \varepsilon$$

được thỏa mãn. Vì $\inf_{x\in X} \sum_{n=1}^{N} \widetilde{f}_n(x) < \infty$ nên từ công thức (6) ta có $x_n \in \overline{\Omega}, n = 1, ..., N$. Khi đó (6) trở thành

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) < \inf_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \varepsilon,$$

vậy Định lí 2.6 được chứng minh. □

2.2 Nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi

Cho X là không gian Banach thực, X^* là không gian đối ngẫu của nó. Xét phương trình đạo hàm riêng

$$F(x, u, Du) = 0 \text{ trên } \Omega, \tag{7}$$

trong đó $\Omega \subset X$, $H : X \times \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, phương trình (7) không có nghiệm cổ điển. Nghiệm nhớt của phương trình đã được đề xuất bởi Crandall và Lions [7] để thay thế cho nghiệm cổ điển. Định nghĩa ban đầu của nghiệm nhớt được trình bày trong [7] và [6] trên cơ sở dưới vi phân Fréchet. Trong [[8], [5]], nghiệm $\beta-$nhớt được định nghĩa cho phương trình (7) trên không gian không có chuẩn Fréchet trơn. Ta nhắc lại Định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 2.7 (Definition 3.1, [5])**.** Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương một chuẩn $\beta-$trơn. Một hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ là *nghiệm dưới* $\beta-$*nhớt* của phương trình (7) nếu u là một hàm nửa liên tục trên và với mỗi $x \in \Omega$, với mỗi $x^* \in D_\beta^+ u(x)$ thì

$$F(x, u(x), x^*) \leq 0.$$

Một hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ là *nghiệm trên $\beta-$nhớt* của phương trình (7) nếu u là một hàm nửa liên tục dưới và với mỗi $x \in \Omega$, với mỗi $x^* \in D^-_\beta u(x)$, thì

$$F(x, u(x), x^*) \geq 0.$$

Hàm u được gọi là *nghiệm $\beta-$nhớt* của phương trình (7) nếu u vừa là nghiệm dưới $\beta-$nhớt vừa là nghiệm trên $\beta-$nhớt của phương trình (7).

Ví dụ 2.1. Xét không gian $X = \mathbb{R}$ với borno Fréchet, hàm $u = 1 - 2|x|$ là nghiệm $F-$nhớt của phương trình

$$|u'| = 2. \tag{8}$$

Thật vậy, khi $x > 0$ thì $u = 1 - 2x$, nên $D^-_F u(x) = D^+_F u(x) = \{-2\}$. Khi $x < 0$ thì $u = 1 + 2x$, nên $D^-_F u(x) = D^+_F u(x) = \{2\}$. Trong cả hai trường hợp thì phương trình (8) thỏa mãn.
Tại $x = 0$, ta có thể tính được $D^-_F u(0) = \emptyset, D^+_F u(0) = [-2; 2]$. Theo định nghĩa nghiệm $\beta-$nhớt thì $u = 1 - 2|x|$ là nghiệm $F-$nhớt của phương trình (8).

Định lí sau là một kết quả quan trọng trong việc chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi.

Định lí 2.8. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với một chuẩn $\beta-$trơn. $\Omega \subset X$ là một tập mở.*
Xét $F(x, u, Du) = u + H(x, Du)$ với $H : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giả thiết:
(A) với mọi $x, y \in X$ và $x^*, y^* \in X^*_\beta$,

$$|H(x, x^*) - H(y, y^*)| \leq w(x - y, x^* - y^*) + K. \max(\|x^*\|, \|y^*\|)\|x - y\|,$$

trong đó K là hằng số dương và $w : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục với $w(0, 0) = 0$.
Giả sử u, v là hai hàm xác định, bị chặn và liên tục đều trên $\overline{\Omega}$. Nếu u là nghiệm β-nhớt dưới v là nghiệm β-nhớt trên của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ và $u \leq v$ trên $\partial\Omega$ thì $u \leq v$ trên $\overline{\Omega}$.

Chứng minh. Lấy ε là hằng số dương bất kỳ. Theo giả thiết (A) tồn tại $\eta \in (0, \varepsilon)$ và một lân cận V_β của 0 trong X^*_β sao cho với $\|x_1 - x_2\| < 2\eta$ và $x^*_1 - x^*_2 \in V_\beta$ thì

$$|H(x_1, x^*_1) - H(x_2, x^*_2)| < \varepsilon + K. \max(\|x^*_1\|, \|x^*_2\|)\|x_1 - x_2\|.$$

Trên X^*, tô pô Fréchet τ_F là tô pô mạnh nhất trong các tô pô τ_β, nên V_β là một τ_F- lân cận của 0. Do vậy, tồn tại $r > 0$ (ta có thể giả thiết $r > \eta$, nếu không thì ta giảm η) sao cho $B(0, r) \subset V_\beta$.

Áp dụng Định lí 2.6 cho hàm $f_1 = v, f_2 = -u$ tồn tại $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, $x_1^* \in D_\beta^- v(x_1)$ và $x_2^* \in D_\beta^+ u(x_2)$ thỏa mãn

(i) $\|x_1^*\|.\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$ và $\|x_2^*\|.\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$;

(ii) $x_1^* - x_2^* \in B(0, r)$;

(iii) $v(x_1) - u(x_2) < \inf\limits_{\overline{\Omega}}(v - u) + \varepsilon$.

Nếu $x_1 \in \partial\Omega$ thì $v(x_1) - u(x_2) \geq u(x_1) - u(x_2)$, do tính liên tục đều của hàm u nên ta có thể suy ra $u(x_1) - u(x_2) \geq -\varepsilon$.
Nếu $x_2 \in \partial\Omega$ thì $v(x_1) - u(x_2) \geq v(x_1) - v(x_2)$, do tính liên tục đều của hàm v nên ta có thể suy ra $v(x_1) - v(x_2) \geq -\varepsilon$.
Trong cả hai trường hợp trên ta đều có được $\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) > -2\varepsilon$. Vì $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) \geq 0$.
Nếu $x_1, x_2 \in \Omega$ thì do u là nghiệm $\beta-$nhớt dưới nên ta có

$$F(x_2, u(x_2), x_2^*) = u(x_2) + H(x_2, x_2^*) \leq 0$$

và v là nghiệm $\beta-$nhớt trên nên ta có

$$F(x_1, v(x_1), x_1^*) = v(x_1) + H(x_1, x_1^*) \geq 0.$$

Do đó, với $\|x_1 - x_2\| < 2\eta$ và $x_1^* - x_2^* \in V_\beta$,

$$\begin{aligned}
\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) &> v(x_1) - u(x_2) - \varepsilon \\
&\geq H(x_2, x_2^*) - H(x_1, x_1^*) - \varepsilon \\
&\geq -(\varepsilon + K.\max(\|x_1^*\|, \|x_2^*\|)\|x_1 - x_2\|) - \varepsilon \\
&\geq -\varepsilon(2 + K).
\end{aligned}$$

Vì $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) \geq 0$ hay $v \geq u$. □

Hệ quả 2.9. *Dưới các giả thiết của Định lí 2.8, u, v là hài hàm liên tục đều, bị chặn trên $\overline{\Omega}$ sao cho $u = v$ trên $\partial\Omega$. u, v là hai nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ thì $u = v$ trên $\overline{\Omega}$.*

Chứng minh. Nếu u, v là hai nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ khi đó:
u là nghiệm dưới $\beta-$nhớt, v là nghiệm trên $\beta-$nhớt nên theo Định lí 2.8 ta có $u \leq v$

trên $\overline{\Omega}$
tương tự v là nghiệm dưới $\beta-$nhớt, u là nghiệm trên $\beta-$nhớt nên theo Định lí 2.8 ta có $v \leq u$ trên $\overline{\Omega}$. Từ đó ta có $u = v$ trên $\overline{\Omega}$. □

Như vậy ta đã chứng minh được tính duy nhất nghiệm $\beta-$nhớt cho phương trình $F(x, u, Du) = 0$ trong lớp hàm liên tục đều và bị chặn.

3 KẾT LUẬN

Bài viết đã chứng minh được tính duy nhất nghiệm $\beta-$nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong lớp hàm liên tục đều và bị chặn trên tập con mở $\Omega \subset X$. Đây là sự mở rộng cho kết quả được trình bày trong [5], ở đó kết quả được trình bày cho lớp hàm liên tục đều và bị chặn trên toàn không gian X. Tuy nhiên, tính duy nhất nghiệm $\beta-$nhớt cho lớp hàm liên tục và không bị chặn cũng như Hamilton H trong phương trình $u + H(x, Du)$ trong đó H phụ thuộc ba ẩn $H(x, u, Du)$ chưa được trình bày. Trong thời gian tới chúng tôi hy vọng rằng sẽ có được những kết quả mới cho các vấn đề quan tâm đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. (1997). *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations.* Birkhauser, Boston. Basel. Berlin.

[2] Borwein J. M. and Zhu Q. J. (1999). *A survey of subdifferential calculus with applications.* Journal nonlinear analysis, Vol. **38**, 687-773.

[3] Crandall M. G. and Lions P. L. (1986). *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, II.* J. Funct. Anal., **65**, 368-405.

[4] Borwein J. M., Preiss D. (1987). *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **303**, 517-527.

[5] Borwein J. M., Zhu Q. J., (1996). *Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity.* Siam J. Control and Optimization, **34**, 1568-1591.

[6] Crandall M. G. and Lions P. L. (1985). *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions.* I, J. Funct. Anal., **62**, 379-398.

[7] Crandall M. G., Lions P. L. (1983). *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **277**, 1-42.

[8] Deville R., Godefroy G., Zizler V. (1993). *A Smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions.* J. Funct. Anal., **111**, 197-212.

[9] Durea M. (2003). *Applications of the Fréchet subdifferential.* Serdica Math. J., **29**, 301-314.

[10] El Haddad E., Deville R. (1996). *The viscosity subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces, I: First order case.* Journal of Convex Analysis, Vol. **3**, no. 2, 295-308.

Title: THE UNIQUENESS OF $\beta-$VISCOSITY SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

Abstract: This article provides some results on $\beta-$viscosity subdifferential and the uniqueness of $\beta-$viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with border values.
Keywords: bornology β, $\beta-$smooth, $\beta-$viscosity subsolution, $\beta-$viscosity supersolution, Hamilton-Jacobi equations.